Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 03, No. 1 (2014), hal 47 – 50.

KAJIAN EKSPEKTASI BERSYARAT DAN SIFAT-SIFATNYA

Desi Natalia

INTISARI

Tulisan ini membahas tentang ekspektasi bersyarat dan sifat-sifatnya. Ekspektasi bersyarat adalah ekspektasi suatu variabel acak yang bergantung pada variabel acak yang lain. Tujuan dalam penelitian ini adalah untuk mengkaji sifat-sifat ekspektasi bersyarat. Sifat-sifat ekspektasi bersyarat yaitu dua variabel acak mempunyai distribusi gabungan, dua variabel acak mempunyai fungsi densitas bersyarat, dan saling bebas. Pada kajian ini sifat-sifat ekspektasi bersyarat telah terbukti bahwa dua variabel acak dalam suatu kejadian adalah mempunyai distribusi gabungan dan saling bebas.

Kata Kunci : *Ekspektasi Bersyarat, Probabilitas, Distribusi Marginal.*

PENDAHULUAN

Salah satu teori dalam ilmu statistika yang sangat penting dan sering digunakan dalam pengamatan suatu penelitian untuk mencari nilai yang diharapkan adalah teori ekspektasi. Ekspektasi adalah suatu nilai harapan terhadap suatu kejadian yang diperhitungkan berdasarkan semua kemungkinan yang akan terjadi terhadap suatu kejadian. Ekspektasi bersyarat adalah ekspektasi suatu variabel acak yang bergantung pada variabel acak yang lain. Teori yang mendukung sifat-sifat ekspektasi bersyarat adalah probabilitas, distribusi gabungan dan marginal, dua kejadian yang saling bebas, probabilitas bersyarat, ekspektasi, dan variansi. Tujuan dalam penulisan ini adalah mengkaji sifat-sifat ekspektasi bersyarat. Pembahasan pada penelitian ini dibatasi pada sifat-sifat ekspektasi bersyarat untuk variabel acak kontinu.

EKSPEKTASI DAN VARIANSI

Jika X adalah variabel acak kontinu yang dapat mengambil setiap nilai x yang memiliki fungsi probabilitas $f(x)$, maka ekspektasi dari variabel acak kontinu X dinotasikan dengan $E(X)$.

Definisi 1. *Jika X adalah suatu variabel acak kontinu dan f(x) adalah fungsi distribusi probabilitas dari x, maka ekspektasi dari variabel acak X adalah* [1]

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Definisi 2. *Jika X adalah variabel acak kontinu dengan nilai fungsi probabilitas di x adalah $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi dari X, maka nilai ekspektasi dari $g(x)$ dinotasikan dengan, $E[g(x)]$ didefinisikan sebagai:* [2]

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)dx$$

Definisi 3. *jika X dan Y adalah variabel acak kontinu dengan distribusi probabilitas gabungan $f(x,y)$ maka ekspektasi variabel acak $g(x,y)$ didefinisikan* [3]

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f(x,y)dxdy$$

EKSPEKTASI BERSYARAT DAN SIFAT-SIFATNYA

Jika X dan Y memiliki fungsi probabilitas gabungan $f(x,y)$, maka fungsi probabilitas bersyarat dari Y jika X diketahui adalah $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$ dimana $g(x)$ adalah fungsi probabilitas marginal dari x.

Definisi 4. *Jika X dan Y adalah dua variabel acak kontinu,* $g(x|y)$ *adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan* $h(y|x)$ *adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka ekspektasi bersyarat dari Y yang diberikan X = x didefinisikan sebagai berikut.* [2]

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot h(y|x)dy$$

dan ekspektasi dari X yang diberikan Y = x dirumuskan sebagai berikut.

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot g(x|y)dx$$

Definisi 5. *Jika X dan Y adalah dua variabel acak kontinu,* $g(x|y)$ *adalah nilai fungsi probabilitas bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan* $h(y|x)$ *adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka ekspektasi bersyarat dari g(X) diberikan Y = y dirumuskan sebagai berikut*. [2]

$$E[g(X|y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot g(x|y)dx$$

dan ekspektasi bersyarat dari $h(Y)$ *diberikan X = x dirumuskan sebagai berikut.*

$$E[h(Y|x)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(y). h(y|x)dy$$

Definisi 6. *Variansi bersyarat dari y diberikan X = x didefinisikan sebagai* [2]

$$Var(Y|x) = E\{[Y - E(Y|x)]^2|x\}$$

Dari definisi yang ada, maka dapat dibuktikan sifat-sifat ekspektasi bersyarat sebagai berikut.

Sifat 1. *Jika X dan Y adalah variabel acak yang berdistribusi gabungan, maka* $E[E(Y|X)] = E(Y)$

Bukti:

$$\begin{aligned}
E[E(Y|X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|x) \cdot f_1(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y|x)dy\right\} f_1(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f(x,y)}{f_1(x)} dy\right\} f_1(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dy\right]dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)dy
\end{aligned}$$

$E[E(Y|X)] = E(Y)$■

Sifat 2. *Jika X dan Y adalah variabel acak yang saling bebas, maka* $E(Y|x) = E(Y)$ dan $E(X|y) = E(X)$

Bukti:

Jika *X* dan *Y* adalah saling bebas, maka $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, dengan demikian $f(y|x) = f_2(y)$ dan $f(x|y) = f_1(x)$

$$\begin{aligned}
E(Y|x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y|x)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)dy
\end{aligned}$$

$E(Y|x) = E(Y)$■

$$\begin{aligned}
E(X|y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_2(x)dx
\end{aligned}$$

$E(X|y) = E(X)$■

Sifat 3. *Jika X dan Y adalah variabel acak yang berdistribusi gabungan, maka* $Var(Y) = E_x[Var(Y|x)] + Var_x[E(Y|x)]$
Bukti:

$$E_x[Var(Y|x)] = E_x\left[E(Y^2|x) - \left(E(Y|x)\right)^2\right]$$
$$= E_x[E(Y^2|x)] - E_x\left\{\left(E(Y|x)\right)^2\right\}$$
$$= E(Y^2) - E_x\left\{\left(E(Y|x)\right)^2\right\} + \left\{\left(E(Y)\right)^2 - \left(E(Y)\right)^2\right\}$$
$$= \{E(Y^2) - [E(Y)]^2\} - \left\{E_x\left[\left(E(Y|x)\right)^2\right] - [E(Y)]^2\right\}$$
$$= Var(Y) - \left\{E_x\left[\left(E(Y|x)\right)^2\right] - [E(Y|x)]^2\right\}$$
$$= Var(Y) - Var_x[E(Y|x)]$$
$$Var(Y) = E_x[Var(Y|x)] + Var_x[E(Y|x)] \blacksquare$$

Sifat 4. *Jika X dan Y adalah variabel acak yang berdistribusi gabungan dan* $h(x,y)$ *adalah fungsi, maka* $E[h(X,Y)] = E_x[E(h(X,Y)|X)]$
Bukti:

$$E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\cdot f(x,y)dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{g(x)}{g(x)}\right)h(x,y)\cdot f(x,y)dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\left(\frac{f(x,y)}{g(x)}\right)g(x)dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\left(\frac{f(x,y)}{g(x)}dy\right)g(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} E(h(X,Y)|x)g(x)dx$$
$$E[h(X,Y)] = E_x[E(h(X,Y)|X)] \blacksquare$$

Sifat 5. *Jika X dan Y adalah dua variabel acak yang saling bebas dan* $g(x)$ *adalah fungsi, maka* $E(g(X)Y|x) = g(x)E(Y|x)$
Bukti:

$$E(g(X)Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y[g(x)\cdot f(y|x)]dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)[y\cdot f(y|x)]dy$$
$$= g(x)\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(y|x)dy$$
$$E(g(X)Y|x) = g(x)E(Y|x) \blacksquare$$

KESIMPULAN

Beberapa sifat-sifat ekspektasi bersyarat yang telah dibuktikan adalah sebagai berikut.

1. jika X dan Y adalah variabel acak berdistribusi gabungan, maka $E[E(Y|X)] = E(Y)$
2. jika X dan Y adalah variabel acak yang saling bebas, maka $E(Y|x) = E(Y)$ dan $E(X|y) = E(X)$
3. jika X dan Y adalah variabel acak berdistribusi gabungan, maka $Var(Y) = E_x[Var(Y|x)] + Var_x[E(Y|x)]$
4. jika X dan Y adalah variabel acak berdistribusi gabungan dan $h(x,y)$ adalah fungsi, maka $E[h(X,Y)] = E_x[E(h(X,Y)|X)]$
5. jika X dan Y adalah variabel acak berdistribusi gabungan dan $g(x)$ adalah fungsi, maka $E(g(X)Y|x) = g(x)E(Y|x)$

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Bain LJ, Engelhard M. *Introduction To Probability and Mathematical Statistics*. California: Duxbury Press; 1991.

[2]. Herrhyanto N, Gantini T. *Pengantar Statistika Matematis.* Bandung: Yrama Widya; 2009.

[3]. Walpole RE, Raymond HM. *Ilmu Probabilitas dan Statistik Untuk Insinyur dan Ilmuan*. Bandung: Institut Teknik Bandung; 1995.

DESI NATALIA : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Jl. Jend. A. Yani Pontianak, deisy_capricorn@yahoo.co.id